Séquence 2 : Limites d'une fonction, aspects graphiques

1 Limite d'une fonction à l'infini

1.1 Limite infinie à l'infini

Dans cette partie, on considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et on étudie l'évolution des valeurs de cette fonction lorsque la variable augmente. Soit ℓ un nombre réel.

Définition. • *Si, pour tout seuil $A > 0$, on peut rendre $f(x)$ supérieur à A en prenant x au dessus d'un certain réel, on dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$. On note :*

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$$

• *De même,*

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty}$$

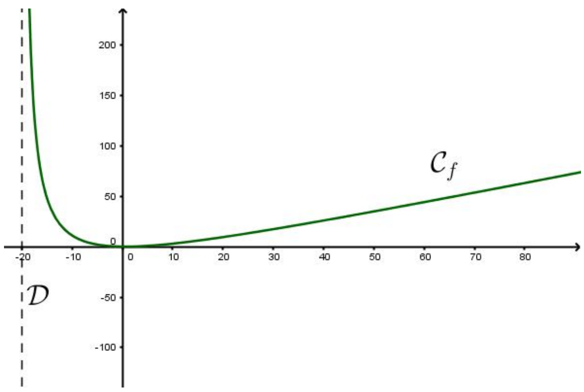
Remarque. *On définit de manière similaire les limites infinies lorsque x tend vers $-\infty$.*

Exemple.

Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction f représentée ci-contre.

.

Que peut-on dire de la droite $\mathcal{D}$? Que peut-on en déduire pour la fonction f ?



1.2 Limite finie à l'infini

Comme précédemment, on considère une fonction f et l'évolution de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Définition. *Si, pour tout écart $\epsilon > 0$, la distance entre $f(x)$ et ℓ est inférieure à ϵ, c'est-à-dire $|f(x) - \ell| < \epsilon$ dès que x est supérieur à un certain réel, on dit que $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers $+\infty$, ou que $f(x)$ a pour limite ℓ en $+\infty$. On note :*

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell.}$$

De même,

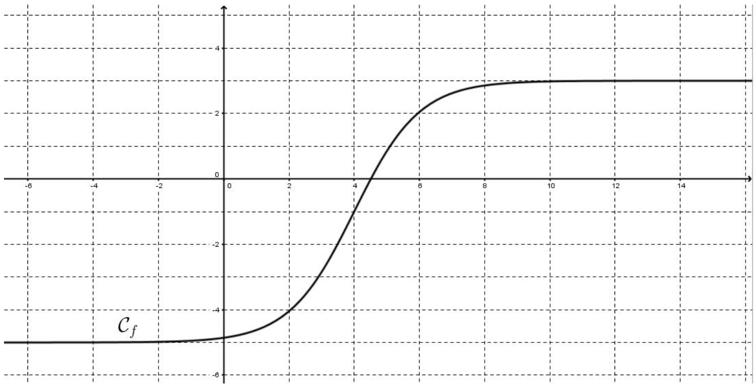
Conséquence. • *Si une fonction f admet pour limite ℓ lorsque x tend vers $+\infty$, alors on dit que la droite d'équation $y = \ell$ est **asymptote** à la courbe représentative de f en $+\infty$, ou que cette courbe admet la droite d'équation $y = \ell$ pour asymptote en $+\infty$.*

- *De même,*

Ces asymptotes sont ***parallèles à l'axe des abscisses****.*

Exemple.

Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de la fonction f représentée ci-contre.
En déduire les asymptotes à la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de f.



Proposition.

- *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{n\to+\infty} x^n = +\infty$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$.
- *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *si* n *est pair,* $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = +\infty$ *et, si* n *est impair,* $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = -\infty$.
- *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$.

2 Limite d'une fonction en un point

Dans cette partie, on considère une fonction f définie sur un intervalle de la forme $]a;b]$ ou $[b;a[$ et on étudie l'évolution des valeurs de cette fonction lorsque la variable x se rapproche de a. Suivant la forme de l'intervalle, on distingue ainsi par quel côté cette variable se rapproche de a.

Définition. *Si, pour tout seuil $A > 0$, on peut rendre $f(x)$ supérieur à A pour x suffisamment proche de a, on dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers a, ou que $f(x)$ a pour limite $+\infty$ en a. On note :*

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = +\infty.}$$

Remarque. *Dans certains cas, il faut différencier la manière de s'approcher de a :*

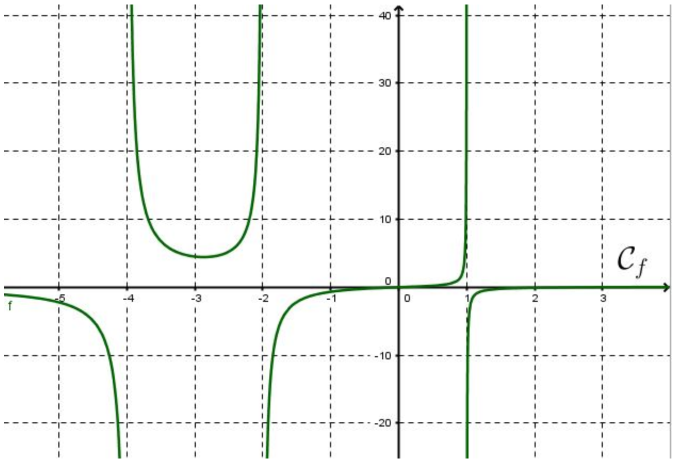
- *si l'on s'approche de a par valeurs inférieures, on note* $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)$ *ou* $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$.
- *si l'on s'approche de a par valeurs supérieures, on note* $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$ *ou* $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$.

Les limites infinies en un point coïncident avec les valeurs interdites de la fonction f, c'est-à-dire les valeurs où la fonction n'est pas définie.

Conséquence. *Si une fonction f admet pour limite $+\infty$ ou $-\infty$ lorsque x tend vers a, par valeurs inférieures ou supérieures,*
alors on dit que la droite d'équation $x = a$ est ***asymptote*** *à la courbe représentative de f en a, ou que cette courbe admet la droite d'équation $x = a$ pour asymptote en a.*

Exemple.

Déterminer toutes les asymptotes à la courbe $\mathcal{C}_f$ parallèles à l'axe des ordonnées.



Compléter :
$\lim\limits_{\substack{x\to -4\\ x<-4}} f(x) =$; $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x>-2}} f(x) =$;
$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) =$; $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) =$

Remarque. *Si la fonction f est définie en a, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.*

3 Bilan et règles de calcul sur les limites

3.1 Conséquences graphiques

Limite	Interprétation graphique
$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \ell$	La droite d'équation $y = \ell$ est asymptote à la courbe représentative de f en $+\infty$.
$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \ell$	La droite d'équation $y = \ell$ est asymptote à la courbe représentative de f en $-\infty$.
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$	La droite d'équation $x = a$ est asymptote à la courbe représentative de f.

3.2 Règles de calcul

- somme et produit de deux fonctions :

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \dots$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \dots$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim\limits_{x\to a} (f(x)+g(x)) = \dots$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI	$-\infty$

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \dots$	ℓ	$\ell>0$	$\ell>0$	$\ell<0$	$\ell<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \dots$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
alors $\lim\limits_{x\to a} (f(x)\times g(x)) = \dots$	$\ell\times\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

- Pour déterminer les limites au niveau d'une valeur interdite d'une fonction, il est en général nécessaire de réaliser le tableau de signes de cette fonction pour déterminer vers quel infini cela tend.

• Cas où $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ldots$	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \ldots$	ℓ'	$+\infty$ ou $-\infty$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$+\infty$ ou $-\infty$
alors $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \ldots$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

• Cas où $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ldots$	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	0
et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \ldots$	0 en restant positif	0 en restant positif	0 en restant négatif	0 en restant négatif	0
alors $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \ldots$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

- Pour déterminer la limite à l'infini d'une fraction rationnelle (quotient de deux polynômes), il faut factoriser le numérateur et le dénominateur de la fraction par la plus grande puissance de x puis simplifier pour obtenir cette limite.

- Composition des limites : a, b et c désignent soit des réels, soit $+\infty$, soit $-\infty$.
  Si $\begin{cases} \lim\limits_{x \to a} f(x) = b \\ \lim\limits_{X \to b} g(X) = c \end{cases}$ alors $\lim\limits_{x \to a} g\big(f(x)\big) = c$.

4 Limites et comparaison

Théorème. ***(comparaison)***
Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de la forme $]A\,;+\infty[$ où A est un réel, soit $-\infty$.

- *si, pour tout $x \in I$, $f(x) \geqslant g(x)$ et $\lim\limits_{x \to \pm\infty} = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$.*
- *si, pour tout $x \in I$, $f(x) \leqslant g(x)$ et $\lim\limits_{x \to \pm\infty} = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = -\infty$.*

Théorème. ***(encadrement)***
Soient f, g et h trois fonctions définies sur un intervalle I de la forme $]A\,;+\infty[$ où A est un réel, soit $-\infty$.
Si, pour tout $x \in I$, $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$ et si g et h ont la même limite ℓ en $\pm\infty$ ou a, alors : $\lim\limits_{x \to \pm\infty \text{ ou } a} f(x) = \ell$.

Les démonstrations de ces théorèmes sont similaires aux démonstrations des mêmes théorèmes, appliqués aux suites.

Théorème. ***(Croissance comparée)***
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$.

5 Un dernier type de limite

Définition. *Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et soit $a \in I$.*
On dit que f est ***dérivable*** *en a si le taux d'accroissement de f en a admet pour limite un nombre réel lorsque h tend vers 0, c'est-à-dire lorsque le point M se rapproche infiniment près du point A.*
Ce nombre, noté alors $f'(a)$, est appelé ***nombre dérivé de f en*** *a.*

Lorsque f est dérivable en a, on a ainsi : $\boxed{f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}}$

Exemple. *On cherche à déterminer* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x}$.

On a : $\lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0$ *et* $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$ *donc c'est une forme indéterminée de type* " $\dfrac{0}{0}$ ".

Or $\sin 0 = 0$ *donc* $\dfrac{\sin x}{x} = \dfrac{\sin x - 0}{x - 0} = \dfrac{\sin(0 + x) - \sin 0}{x - 0}$.

Ainsi : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(0 + x) - \sin 0}{x - 0} = \sin'(0) = \cos(0) = 1$.